超準解析による経路積分(量子情報理論と開放系)

AUTHOR(S):

中村, 徹

CITATION:

中村, 徹. 超準解析による経路積分(量子情報理論と開放系). 数理解析研究所講究録 1997, 982: 115-125

ISSUE DATE:

1997-03

URL:

http://hdl.handle.net/2433/60916

数理解析研究所講究録
982巻 1997年 115-125

超準解析による経路積分

駿台予備学校　中村　徹　(Toru Nakamura)

1　はじめに

ここで扱う方程式は，ポテンシャルをもつ Schrödinger 方程式

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\phi(t,x)=H^S\phi(t,x),\quad H^S=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+V(x)$$

と Dirac 方程式

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(t,x)=H\psi(t,x),\quad H=\left(-ic\hbar\frac{\partial}{\partial x}-eA_1(t,x)\right)\alpha+eA_0(t,x)I+mc^2\beta$$

である．ここに I は 2×2 単位行列で，α,β は

$$\alpha^2=\beta^2=I,\quad \alpha\beta+\beta\alpha=0$$

をみたす 2×2 エルミット行列である．ただし，1+1 次元時空とする．

経路 $x(t)$ の汎関数 $\exp\{(i/\hbar)S[x(t)]\}$ の経路空間上での積分で，これらの基本解が表されることを初めて主張したのは R. P. Feynman [Fe] であり，その数学的な合理化が，いろいろな方向から試みられてきた (cf. [B-C-S-S], [Fu], [G-J-K-S], [G-S], [I], [I-T], [Na], [Ne], [S]).

その1つとして，経路空間上に測度を導入し，その測度に関する積分として合理化するという方向があり，次のような結果が知られている．

(i) 1+1 次元時空の Dirac 方程式に対しては完全加法的測度が存在する (cf. [I], [B-C-S-S]).

(ii) 1+3 次元時空の Dirac 方程式に対しては完全加法的測度は存在しない (cf. [Za]).

(iii) Schrödinger 方程式に対しては次元に関係なく完全加法的測度は存在しない (cf. [C]).

本稿ではノンスタンダードアナリシスを利用して，

(i) 1+1 次元時空の Dirac 方程式に対してノンスタンダードな $*$測度を構成し，その Loeb completion としてスタンダードな完全加法的測度を構成する

(ii) この $*$測度における光速 c を適当な無限大数にとることで，ポテンシャルをもつ Schrödinger 方程式の解が，ノンスタンダードな $*$経路積分 ($*$経路和) として実現できる．ただし光速が無限大数なので，これからスタンダードな完全加法的測度は構成できない

ことを明らかにする．ただし紙数の関係で証明は省略する．

2　Dirac 粒子に対する $*$測度

Dirac 粒子に対する $*$測度を見つけるために，時間推進作用素

$$\hat{U}(t) = \exp(-i\hat{H}_0 t/\hbar), \quad \hat{H}_0 = -ic\hbar\alpha\frac{\partial}{\partial x} + mc^2\beta$$

をブラ・ケットではさんだ値 $< x \mid \hat{U}(t) \mid y >$ を計算する．

Trotterの公式を考慮すると，$t = n\Delta t, \quad \Delta t \approx 0$ のとき

$$< x \mid \exp(-i\hat{H}_0 t/\hbar) \mid y > \approx < x \mid \left\{\exp(-ic\hat{p}\alpha\Delta t/\hbar)\cdot\exp(-imc^2\beta\Delta t/\hbar)\right\}^n \mid y >$$

なので，$< x \mid \exp(-ic\hat{p}\alpha\Delta t/\hbar)\cdot\exp(-imc^2\beta\Delta t/\hbar) \mid y >$ を計算すればよい．結果は

$$\begin{aligned} & < x \mid \exp(-ic\hat{p}\alpha\Delta t/\hbar)\cdot\exp(-imc^2\beta\Delta t/\hbar) \mid y > \\ = & \left\{\delta(x-y-c\Delta t)\cdot\frac{1}{2}(I+\alpha) + \delta(x-y+c\Delta t)\cdot\frac{1}{2}(I-\alpha)\right\}\cdot\exp(-imc^2\beta\Delta t/\hbar) \end{aligned}$$

となる．この式を次のように解釈する：

(i) 点 $(t-\Delta t, x-c\Delta t)$ と点 (t,x) をつなぐ経路は行列値ウエイト $P_+ = \frac{1}{2}(I+\alpha)$ を運ぶ.

(ii) 点 $(t-\Delta t, x+c\Delta t)$ と点 (t,x) をつなぐ経路はウエイト $P_- = \frac{1}{2}(I-\alpha)$ を運ぶ.

(iii) 点 (t,x) において質量 m の影響 $\exp(-imc^2\beta\Delta t/\hbar) \simeq I - imc^2\beta\Delta t/\hbar$ を拾う.

このような考察から，次のように定義する．

定義　1

(1) 正の無限小数 ε と $N \in {}^*\mathsf{N}\setminus\mathsf{N}$ に対して，無限小の格子間隔 ε, $c\varepsilon$ をもつ直角格子空間 L を

$$\mathsf{L} = \mathsf{T}\times\mathsf{X}, \quad \mathsf{T} = \{0,\ \varepsilon,\ 2\varepsilon,\ \cdots,\ N\varepsilon\}, \quad \mathsf{X} = \{0,\ \pm c\varepsilon,\ \pm 2c\varepsilon,\ \cdots\}$$

で定義する．

(2) Ω を T から $\{-1,1\}$ への内的な関数の全体とし，$\omega\in\Omega$ に対して，点 $(0,y)$ を出発する経路 $X_\omega(\cdot)$ を

$$X_\omega(k\varepsilon) = y + \sum_{l=0}^{k-1} c\varepsilon\omega(l\varepsilon) \ \ (k = 1,2,\cdots,N)$$

で定義する．

(3) 時刻 $k\varepsilon$ における経路 X_ω 上の点(以下，頂点とよぶ)を$\mathrm{P}_k(k\varepsilon,\ X_\omega(k\varepsilon))$ とし，頂点 P_k と P_{k+1} とを結ぶ線分を l_k とする．このとき，経路 X_ω に対する $*$測度 $\mu_0(X_\omega)$ を次のように定

義する．

$$
\begin{aligned}
\mu_0(X_\omega) &= L(l_{N-1})M_0(\mathrm{P}_{N-1})L(l_{N-2})M_0(\mathrm{P}_{N-2})\cdots M_0(\mathrm{P}_1)L(l_0),\\
M_0(\mathrm{P}_k) &= I-\frac{i\varepsilon}{\hbar}mc^2\beta,\\
L(l_k) &= \begin{cases} \dfrac{1}{2}(I+\alpha) & (l_k \text{ の傾きが } c \text{ のとき}),\\[2mm] \dfrac{1}{2}(I-\alpha) & (l_k \text{ の傾きが } -c \text{ のとき}).\end{cases}
\end{aligned}
$$

(4) $(t,x)\in \mathsf{R}$ に対して，

$$\underline{t}\le t<\underline{t}+\varepsilon,\quad \underline{x}\le x<\underline{t}+c\varepsilon$$

で $\underline{t}\in\mathsf{T}$, $\underline{x}\in\mathsf{X}$ を定める．

初期関数 $f=\begin{pmatrix} f_1\\ f_2\end{pmatrix}$ と $(t,x)\in\mathsf{R}^2$ に対して

$$
\begin{pmatrix}\Psi_1(\underline{t},\underline{x})\\ \Psi_2(\underline{t},\underline{x})\end{pmatrix} = \sum_{X_\omega\in\mathcal{P}_{t,x}}\mu_0(X_\omega)\begin{pmatrix}{}^*f_1(X_\omega(0))\\ {}^*f_1(X_\omega(0))\end{pmatrix}, \tag{1}
$$

$$
\begin{pmatrix}\psi_1(t,x)\\ \psi_2(t,x)\end{pmatrix} = st\begin{pmatrix}\Psi_1(\underline{t},\underline{x})\\ \Psi_2(\underline{t},\underline{x})\end{pmatrix}, \tag{2}
$$

ただし，$\mathcal{P}_{t,x}=\{X_\omega \mid X_\omega(\underline{t})=\underline{x}\}$ とする．

定義 1 の $*$測度 μ_0 は次の性質をもっている．

命題 1 $\underline{t}=N\varepsilon$ とし，折れ線経路 X_ω の折れ曲がる回数を $r(X_\omega)$ とする．

(1) $\frac{1}{2}(I\pm\alpha)=P_\pm$ とおくと，

$$P_\pm^2=P_\pm,\quad P_\pm^*=P_\pm,\quad P_\pm P_\mp=0.$$

(2) (i) $\omega(0)=1$, $\omega((N-1)\varepsilon)=1$, $r(X_\omega)=2k$ のとき

$$\mu_0(X_\omega)=(-i\varepsilon mc^2/\hbar)^{2k}P_+.$$

(ii) $\omega(0)=-1$, $\omega((N-1)\varepsilon)=1$, $r(X_\omega)=2k+1$ のとき

$$\mu_0(X_\omega)=(-i\varepsilon mc^2/\hbar)^{2k+1}P_+\beta.$$

(iii) $\omega(0) = 1,\ \ \omega((N-1)\varepsilon) = -1,\quad r(X_\omega) = 2k+1$ のとき

$$\mu_0(X_\omega) = (-i\varepsilon mc^2/\hbar)^{2k} P_-\beta.$$

(iv) $\omega(0) = -1,\ \ \omega((N-1)\varepsilon) = -1,\quad r(X_\omega) = 2k$ のとき

$$\mu_0(X_\omega) = (-i\varepsilon mc^2/\hbar)^{2k} P_-.$$

定理 1 $*$測度 μ_0 から自由 Dirac 粒子の基本解

$$K_0(t,x;0,0) = \frac{1}{2}\left(I\frac{\partial}{c\partial t} - \alpha\frac{\partial}{\partial x} - \frac{imc}{\hbar}\beta\right)\left(J_0\left(\frac{mc}{\hbar}\sqrt{c^2t^2 - x^2}\right)\cdot\theta(ct - |x|)\right)$$

が導かれる.

電磁ポテンシャル $A_i(t,x)$ $(i=1,2)$ がある場合は，定義1の $M_0(\mathrm{P}_k)$ と μ_0 をそれぞれ

$$\begin{aligned} M(\mathrm{P}_k) &= I - \varepsilon\frac{i}{\hbar}\left(mc^2\beta + e\,{}^*\!A_0(\mathrm{P}_k)I - e\,{}^*\!A_1(\mathrm{P}_k)\alpha\right), \\ \mu(X_\omega) &= L(l_{N-1})M(\mathrm{P}_{N-1})\cdots M(\mathrm{P}_1)L(l_0) \end{aligned}$$

に変更する. $\mu(X_\omega)$ は $\mu_0(X_\omega)$ と

$$\mu(X_\omega) = \prod_{k\notin R(X_\omega)}\left\{1 - \varepsilon\frac{i}{\hbar}\left(e\,{}^*\!A_0(\mathrm{P}_k) - \sigma(l_k)e\,{}^*\!A_1(\mathrm{P}_k)\right)\right\}\cdot\mu_0(X_\omega) \tag{3}$$

で結ばれている. ここに

$$R(X_\omega) = \{k \mid \omega((k-1)\varepsilon)\omega(k\varepsilon) = -1\}$$

であり，$\sigma(l_k)$ は線分 l_k の傾きの符号である.

式(1) の中の μ_0 を μ で置き換えて $\psi(t,x) = \begin{pmatrix}\psi_1(t,x)\\ \psi_2(t,x)\end{pmatrix}$ を定義したとき

定理 2 $A_j \in \mathsf{C}^2(\mathsf{R}^2),\ \ f_j \in \mathsf{C}^2(\mathsf{R})$ のとき $\psi(t,x)$ は電磁ポテンシャル A_j をもつ Dirac 方程式の古典解になる.

3 Dirac 粒子に対するスタンダードな測度

前節で定義した μ_0 からノンスタンダードな 2×2 $*$行列値 $*$測度空間 ($\mathcal{P}_{t,x}$, $\mathcal{A}$, μ_0) が次のようにして構成される．

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{t,x} &= \{X_\omega : X_\omega(\underline{t}) = \underline{x}\},\\ \mathcal{A} &= \{A \subseteq \mathcal{P}_{t,x} : A\text{は内的}\},\\ \mu_0(A) &= \sum_{X_\omega\in A} \mu_0(X_\omega).\end{aligned}$$

これは内的な $*$有限加法的 $*$測度空間であり，そこでの $*$積分は $*$有限和で定義される．したがって，定理1を次のように述べることができる：

> 初期関数をノンスタンダードの世界に持ち上げ，それを $*$経路積分 ($*$経路和) して
> その標準部分をとると，スタンダードな関数となり Dirac 方程式の古典解になる．

つまり計算は最後までノンスタンダードの世界で遂行し，最後の段階でスタンダードの世界に降りるのである．これにたいして，この節では $*$測度空間からスタンダードな完全加法的測度空間が構成できて，すべてをスタンダードな世界で考えることもできることを示す (cf. [Ži]).

$*$測度 μ_0 の $*$全変動 $|\mu_0|$ とは

$$|\mu_0|(A) = {}^*\sup_P \sum_{i=1}^{l} {}^*\| \mu_0(D_i) \|$$

で定義される．ここに

$$P = \{D_1, D_2, \cdots, D_l\}$$

は $\mathcal{A}$ の要素による A の内的な $*$有限分割を表す．つまり

$$D_i \cap D_j = \emptyset \ (i \neq j), \quad \bigcup_{i=1}^{l} D_i = A, \quad D_i \in \mathcal{A}$$

が成り立つ．命題1 *(2)* を用いると

$${}^*\| \mu_0(X_\omega) \| = (mc^2\varepsilon/\hbar)^{r(X_\omega)}$$

が得られ，これから

$$|\mu_0|(A) \leq \exp(mc^2 t/\hbar), \quad A \in \mathcal{A}$$

が導かれる．したがって μ_0 は $*$有界変動であって，その全変動はパラメータ $mc^2t/\hbar$ をもつ Poisson 確率測度である．

($\mathcal{P}_{t,x}$, $\mathcal{A}$, $|\mu_0|$) は有界な $*$正値の有限加法的 $*$測度空間なので，これから Loeb 測度空間 ($\mathcal{P}_{t,x}$, $L(\mathcal{A})$, $L(|\mu_0|)$) をつくることができる (cf. [A])．ここに

$L(\mathcal{A})$ は $\mathcal{P}_{t,x}$ 上の完全加法的集合族
$L(|\mu_0|) : L(\mathcal{A}) \to \mathsf{R}_+$ は完全加法的正値測度

である．Loeb 測度空間の性質として

$$A \in L(\mathcal{A}) \Leftrightarrow \exists B \in \mathcal{A} \quad L(|\mu_0|)(A \bigtriangleup B) = 0$$

がなりたち，さらにこのような B_1，$B_2 \in \mathcal{A}$ に対して

$$\begin{aligned} st\,({}^*\|\,\mu_0(B_1) - \mu_0(B_2)\,\|) &\leq st\,(|\mu_0|(B_1 \bigtriangleup B_2)) \\ &\leq L(|\mu_0|)(A \bigtriangleup B_1) + L(|\mu_0|)(A \bigtriangleup B_2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

なので

$$\mu_0(B_1) \simeq \mu_0(B_2)$$

となる．したがって次のように定義できる．

定義 2 $A \in L(\mathcal{A})$ に対して，$L(|\mu_0|)(A \bigtriangleup B) = 0$ をみたす $B \in \mathcal{A}$ をとり，$\mu_L : L(\mathcal{A}) \to \mathsf{M}_2(\mathsf{C})$ を

$$\mu_L(A) = st\,(\mu_0(B))$$

で定義する．ここに $\mathsf{M}_2(\mathsf{C})$ は複素数を成分とする 2×2 行列の全体である．

すると $(\mathcal{P}_{t,x}$, $L(\mathcal{A})$, $\mu_L)$ はノンスタンダードな経路空間 $\mathcal{P}_{t,x}$ の上のスタンダードな $\mathsf{M}_2(\mathsf{C})$-値完全加法的測度空間になることが証明できる．ただし，まだ経路の空間 $\mathcal{P}_{t,x}$ はノンスタンダードな経路から成っている．そこで，経路の空間もスタンダードな $(\mathsf{P}_{t,x}$, $\mathcal{B}$, $m_L)$ を次のように定義する．

定義 3

$$\begin{aligned} \mathsf{P}_{t,x} &= \{x(s) \in \mathsf{C}[0,t] : x(t) = x,\ \forall s_1, s_2 \in [0,t]\ |x(s_1) - x(s_2)| \leq c|s_1 - s_2|\}, \\ \mathcal{B} &= \{A \subseteq \mathsf{P}_{t,x} : \{X_\omega \in \mathcal{P}_{t,x} : stX_\omega \in A\} \in L(\mathcal{A})\}, \\ m_L(A) &= \mu_L(\{X_\omega \in \mathcal{P}_{t,x} : stX_\omega \in A\}), \quad A \in \mathcal{B}. \end{aligned}$$

ここに $stX_\omega \in \mathsf{P}_{t,x}$ は

$$(stX_\omega)(s) = st(X_\omega(\underline{s})), \quad s \in [0,t]$$

で定義されるスタンダードな経路である．

このとき次のことが成り立つ．

命題 2 $(\mathsf{P}_{t,x},\ \mathcal{B},\ m_L)$ は $\mathsf{P}_{t,x}$ の筒集合を含む $\mathsf{M}_2(\mathsf{C})$-値の完全加法的測度空間である.

命題1 *(2)* のように μ_0 が具体的なので, m_L の情報を具体的な計算によって得ることができる:

定理 3 m_L は

$$S = \{x(s) \in \mathsf{P}_{t,x} : x(s) \text{ は有限回折れ曲がる区分的に傾き } \pm c \text{ の折れ線}\}$$

の上に集中している.

最後に, ノンスタンダードな $*$積分 ($*$有限和) とスタンダードな積分の関係について述べる. ノンスタンダードな $*$測度空間 $(\mathcal{P}_{t,x},\ \mathcal{A},\ \mu_0)$ での $*$経路積分は

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \Psi_1(\underline{t},\underline{x}) \\ \Psi_2(\underline{t},\underline{x}) \end{pmatrix} &= \sum_{X_\omega \in \mathcal{P}_{t,x}} \mu_0(X_\omega)\cdot G[X_\omega] \left(= {}^*\!\!\int_{\mathcal{P}_{t,x}} G[X_\omega]\mu_0(dX_\omega) \text{ で表す} \right), \\
G[X_\omega] &= \prod_{k \notin R(X_\omega)} \left\{ 1 - \varepsilon \frac{i}{\hbar} \left(e^*A_0(\mathrm{P}_k) - \sigma(l_k) e^*A_1(\mathrm{P}_k) \right) \right\} \begin{pmatrix} {}^*f_1(X_\omega(0)) \\ {}^*f_2(X_\omega(0)) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

で与えられていた (定義1 *(4)* と式 (3) 参照).

これに対応して, スタンダードな測度空間 $(\mathsf{P}_{t,x},\ \mathcal{B},\ m_L)$ での経路積分は

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \phi_1(t,x) \\ \phi_2(t,x) \end{pmatrix} &= \int_{\mathsf{P}_{t,x}} g[x(\cdot)] m_L(dx(\cdot)), \\
g[x(\cdot)] &= \exp\left[-\frac{i}{\hbar} \int_0^t \left\{ eA_0(s,x(s))ds - eA_1(s,x(s)) \frac{dx(s)}{c} \right\} \right] \begin{pmatrix} f_1(x(0)) \\ f_2(x(0)) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

で定義され, 両者の間には次の関係が成り立つことが証明できる.

定理 4

$${}^*\!\!\int_{\mathcal{P}_{t,x}} G[X_\omega]\mu_0(dX_\omega) \simeq \int_{\mathsf{P}_{t,x}} g[x(\cdot)] m_L(dx(\cdot)).$$

4 Schrödinger 方程式に対する $*$経路積分

純虚数時間 (または質量) の Schrödinger 方程式の場合, 経路積分は Wiener 測度で合理化され, その解析接続として実時間 (実質量) の Schrödinger 方程式の解が得られることが知られている (cf. [Ne], [S]). 1節でも述べたように, 実時間の Schrödinger 方程式に対する経路積分

を合理化する測度は存在しないことが証明されているのでこのような方法をとるのである(cf. [C]).

ここではこれと異なる方向からのアプローチを行う．時間は実数のままで，Dirac 粒子に対する経路積分の非相対論的極限として(光速 c を適当な無限大数にとることで)，Schrödinger 粒子をとらえようという方向である．

ノンスタンダードな $*$測度による $*$経路積分($*$経路和)として経路積分を合理化することはできるが，c が無限大数のためにその $*$測度が有界変動でなくなり，したがって3節のようにスタンダードへの還元はできない．

まず，$*$測度 μ_0 から初等的な計算で

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_0(\underline{t},\underline{x};0,0) \simeq & -\frac{mc}{2\hbar}\sqrt{\frac{c\underline{t}+\underline{x}}{c\underline{t}-\underline{x}}}\,{}^*J_1\left(\frac{mc}{\hbar}\sqrt{c^2\underline{t}^2-\underline{x}^2}\right)P_+\\ & -\frac{imc}{2\hbar}\,{}^*J_0\left(\frac{mc}{\hbar}\sqrt{c^2\underline{t}^2-\underline{x}^2}\right)P_+\beta\\ & -\frac{imc}{2\hbar}\,{}^*J_0\left(\frac{mc}{\hbar}\sqrt{c^2\underline{t}^2-\underline{x}^2}\right)P_-\beta\\ & -\frac{mc}{2\hbar}\sqrt{\frac{c\underline{t}-\underline{x}}{c\underline{t}+\underline{x}}}\,{}^*J_1\left(\frac{mc}{\hbar}\sqrt{c^2\underline{t}^2-\underline{x}^2}\right)P_-\end{aligned}$$

が得られる．$c\underline{t}$ に対して $\underline{x}$ が無視できるとすると，

$$\sqrt{\frac{c\underline{t}\pm\underline{x}}{c\underline{t}\mp\underline{x}}}\simeq 1,\quad (z=)\frac{mc}{\hbar}\sqrt{c^2\underline{t}^2-\underline{x}^2}\simeq\frac{mc^2t}{\hbar}\left(1-\frac{x^2}{2c^2t^2}\right)$$

であり，z が無限大数なので Bessel 関数の漸近展開

$${}^*J_1(z)\sim-\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos(z+\frac{\pi}{4}),\qquad {}^*J_0(z)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin(z+\frac{\pi}{4})$$

を用いることができる．とくに β が対角行列である表示，たとえば

$$\alpha=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad \beta=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

を選ぶと

$$\begin{aligned}&\mathcal{K}_0(\underline{t},\underline{x};0,\eta)\simeq\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix},\\ &a\simeq\sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar t}}\exp\left(\frac{im(x-\eta)^2}{2\hbar t}\right)\cdot\exp\left(-i\frac{mc^2}{\hbar}t\right)\end{aligned}$$

となって，free の Schödinger kernel が得られる．

この事実を用いて $*$経路積分を実現するために，時間軸方向の格子間隔を2重に考える．つまり格子間隔が ε の細かな格子と $\tau=\varepsilon\nu$ $(\tau\simeq 0,\ \nu\in{}^*\mathsf{N}\setminus\mathsf{N})$ の粗い格子である．

- 細かな格子間隔では，zitterbewegung しているDirac 粒子
- 粗い格子間隔では，zitterbewegung が均されて Schrödinger 粒子

これに応じて経路にわたる $*$有限和も２段階で考える：

- 時刻 $0,\ \tau,\ 2\tau,\ \cdots,\ n_t\tau \simeq t$ における位置 $x_0,\ x_\tau,\ \cdots,\ x_{(n_t-1)\tau}$ を固定し，$X_\omega(k\tau) = x_{k\tau}$ であるような，細かな格子空間の経路にわたる和
- 粗い格子において $x_0,\ x_\tau,\ \cdots,\ x_{(n_t-1)\tau}$ を変化させて和をとるが，この段階でポテンシャルの影響を拾う

以上の話を実現するために種々の評価が必要になる．とりわけ $c\tau$ と $x-y$ との関係が問題になり，空間軸の cut-off を 初期関数に関して一様にとる必要がでてくる．そしてそのために $2^{\aleph_0}$-級飽和定理が有効である．たとえば，$2^{\aleph_0}$-飽和定理を用いると次のような命題を導くことができる．

$$\begin{aligned}
&\exists A_0 \in {}^*\mathsf{R}\quad \forall\phi \in \mathsf{L}^2(\mathsf{R})\cap\mathsf{C}(\mathsf{R})\quad \forall a \in \mathsf{R}^+\quad \forall t \in \mathsf{R}^+\quad \forall A > A_0\\
&\quad {}^*\| \exp(-\frac{i}{\hbar}t\,{}^*H^S)^*\phi(x)\\
&\quad -\int_{-A}^{A}\cdots\int_{-A}^{A}\exp\left(\frac{i}{\hbar}\,{}^*S_t(x,x_{n_t-1},\cdots,x_0)\right){}^*\phi(x_0)\prod_{j=0}^{n_t-1}{}^*\tilde{d}x_j\ \|_2 < a
\end{aligned}$$

ここに

$$\begin{aligned}
S_t(x_n,x_{n-1},\cdots,x_0) &= \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{m}{2}\frac{(x_j-x_{j-1})^2}{(t/n)^2} - V(x_j)\right)\frac{t}{n},\\
{}^*\tilde{d}x &= \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\tau}}dx
\end{aligned}$$

である．

このような命題をいくつか用意し，誤差の細かな評価を行い，結果として３つのパラメータ τ, c, ε を適当なものに選ぶと，標準部分をとったときにすべての誤差が消えることがいえる．そのことを踏まえて次のように定義する．

定義 4

(1) $(t,x) \in \mathsf{R}^2$ に対して

$$\mathcal{P}_{t,x}^{A_1} = \{X_\omega(\cdot) \in \mathcal{P}_{t,x}:\ X_\omega(k\tau) \in \mathsf{X}_{A_1},\quad k = 0,1,\cdots,n_t-1\}.$$

ここに $A_1 = A_0 e^{t_0/\tau}$(t_0 は時間の単位) である．

(2) 初期関数 $\phi(x) \in \mathsf{L}^2(\mathsf{R}) \cap \mathsf{C}(\mathsf{R})$ と $(t,x) \in \mathsf{R}^2$ に対して

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\Phi_1(\underline{t},\underline{x})\\ \Phi_2(\underline{t},\underline{x})\end{pmatrix} &= \sum_{X_\omega \in \mathcal{P}^{A_1}_{t,x}} \mu_V(X_\omega; c)\begin{pmatrix}{}^*\phi(X_\omega(0))\\ 0\end{pmatrix},\\ \phi(t,x) &= st\Phi_1(\underline{t},\underline{x})\end{aligned}$$

とする．ただし

$$\mu_V(X_\omega; c) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\sum_{j=1}^{N_1} \tau V(X_\omega(j\tau))\right)\cdot \mu_0(X_\omega, c)\cdot \exp\left(i\frac{mc^2}{\hbar}t\right).$$

この定義に対して，次の定理が成り立つ．

定理 5 初期関数 $\phi(x)$ とポテンシャル $V(x)$ が次の条件をみたすとする．

(i) $H^S = -\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)$ は $\mathsf{L}^2(\mathsf{R})$ における自己共役作用素である．
(ii) $V(x) \in \mathsf{C}(\mathsf{R})$.
(iii) $\phi(x) \in \mathsf{L}^2(\mathsf{R}) \cap \mathsf{C}(\mathsf{R})$.

このとき $\phi(t,x)$ はポテンシャル $V(x)$ をもつ Schrödinger 方程式の，初期条件 $\phi(0,x) = \phi(x)$ をみたす解である．

References

[A] Albeverio, S. : Nonstandard methods in stochastic analysis and mathematical physics. Acad. Press 403–407 (1986)

[B-C-S-S] Blanchard, Ph., Combe, Ph., Sirgue, M., Sirugue-Collin, M. : Probabilistic solution of the Dirac equation in presence of an electromagnetic field. BiBos, Universität Bielefeld, Preprints (1985).

[C] Cameron, R.H. : A family of integrals serving to connect the Wiener and Feynman integrals. J. Math. and Phys. **39**, 126–140 (1960)

[Fe] Feynman, R.P. : Space-time approach to nonrelativistic quantum mechanics. Rev. Modern Phys. **20**, (1948)

[Fu] Fujiwara, D. : A construction of the fundamental solution for the Schödinger equation. J. D'Analyse Mathématique **35**, (1979)

[G-J-K-S] Gaveau, B., Jacobson, T., Kac, M., Schulman, L.S. : Relativistic extension of the analogy between Quantum mechanics and Brownian motion. Phys. Rev. Lett. **53**, 419-422 (1984)

[G-S] Gaveau, B., Schulman, L.S. : Dirac equation path integral; Interpreting the Grassmann variables. Nuovo Cimento **11**D, 31–51(1989)

[H-L] Hurd, A.E., Loeb,P.A. : An Introduction to Nonstandard Real Analysis. Acad. Press (1985)

[I] Ichinose, T. : Path integral for the Dirac equation in two space-time dimensions. Proc. Japan Acad. **58**, (1982)

[I-T] Ichinose, T., Tamura, H. : Path integral approach to relativistic quantum mechanics – Two-dimensional Dirac equation –. Suppl. Prog. Theor. Phys. **92**, (1987)

[Na] Nakamura, T. : A nonstandard representation of Feynman's path integrals. J. Math. Phys. **32**, 457–463 (1991)

[Ne] Nelson, E. : Feynman integrals and the Schrödinger equation. J. Math. Phys. **5**, (1964)

[S] Simon, B. : Functional Integration and Quantum Physics. Acad.Press. (1979)

[Za] Zastawniak, T. : The nonexistence of the path-space measure for the Dirac equation in four space-time dimensions. J. Math. Phys. **30**, 1354–1358(1989)

[Ži] Živaljević, R.T. : Loeb completion of internal vector-valued measures. Math. Scand. **56**, 276–286 (1985)